39. 河口先生ニ答ヘテ.

佐藤常三（京大）

全紙,数,談會第10号ニ掲載ノ河口先生(北大)ノ御質問ニ答ヘヨウトスルノデスガ目下ノトコロ残念作ラ未完成デゴザイマスガ,先生ガ御要求ノ程度ノ解決ガ出来テヰルトスレバ幸甚デ御座イマス.

問題ノ積分方程式ハ

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b L(x,y;\lambda)\varphi(y)\,dy \tag{1}$$

但シ茲ニ

$$\lambda L(x,y;\lambda) = \frac{\lambda K(x,y)}{1-\lambda A(x)} \tag{2}$$

（$K(x,y)$ ハ有限連続）

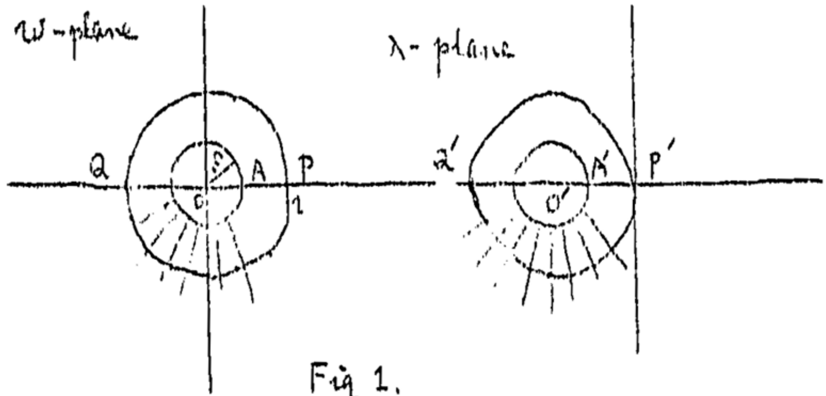
デ $K(x,y)$ ガ実デ対称デアルトキ $\lambda L(x,y;\lambda)$ ガ固有値ヲ有スルカ,即チ $D[\lambda L] \equiv D\left[\frac{\lambda K}{1-\lambda A}\right]$ ノ零点ガ存在スルカトイフノガ御質問ノ筋デアリマス,コレニ対シテ ———— $A(x)$ ガソノ存在域デ到ルトコロ同符号デアルナラバ,$|A(x)|$ ガ十分小ナル限リ必ズ $D[\lambda L]$ ノ零点ガ存在シ得ル ———— トイフノガ私ノ解デ御座イマス.先生ノ御質問ノ冒頭ニアリマス様ナ專門家デハアリマセンカラコノ程度デ御止願ヒマス.

扨テ(2)ヲ考ヘナイデ(1)ノミヲ注目スルトキハ Parameter ヲ含ム核ノ積分方程式トイフコトニナリマス,コレニ対スル文献ハ J. D. Tamarkin, On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter, Annals of Math., (2) 28, pp. 127−152, トイフノガアリマス,併シ乍ラ(2)ヲミマスト $1-\lambda A(x)=0$ for any x ガ成立スベキ λ ノ集合ガ除去サレネバナリマセンカラ,Tamarkin ノ結果ヲ利用スルコトガ出来ナイ様ニ思ハレマス,ソコデ私ハ次ノ様ニ考ヘマシタ,マヅ $A(x)>0$ for any x ト假設シマス,ソコデ適当ニ

$\alpha>0$ ヲキメテ(x ニ無関係ニ),

$$1-A(x_0)\lambda = w, \quad |w| \geqq \delta \quad \text{for } x = x_0$$

トオイテ, w-plane ト λ-plane トノ対応(円ハ円ニ)ヲ考ヘマスト



$$\begin{cases} \overline{OA} = \delta, \\ \overline{O'A'} = \dfrac{\delta}{A_0}, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{O'P'} = \dfrac{1}{A_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OQ} = 1 \\ \overline{P'Q'} = \dfrac{2}{A_0}, \end{cases} \quad A(x_0) = A_0$$

Fig 1.

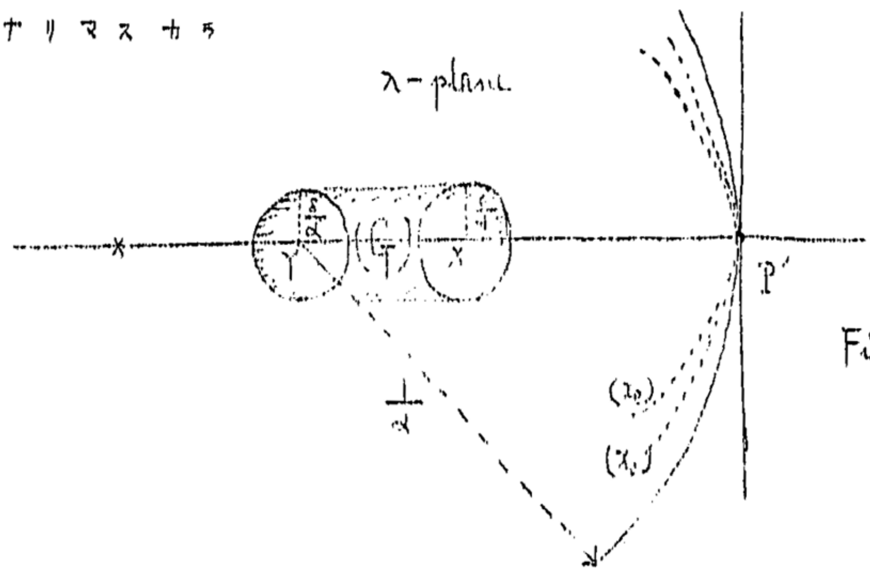
(A ニ対応スル点ヲ A' トスル)

大体図ノ如クナリマセウ, 今 O' ヲ中心トシ, $\dfrac{\delta}{A_0}$ ヲ半径トスル円デ囲マレタ開域ヲ $\Omega(x_0)$ トシ, ソノ Complement ヲ Ω' トスルナラバ, $\Omega'(x_0)$ ニ於テ $L(x,y;\lambda)$ ハ y ノ任意ノ点ニ対シテ λ ノ正則函数トナリマセウ,

次ニ x_0 ヲ動カシテ見マス. ソノトキ円域 $\Omega(x_0)$ ガ掃ク領域ヲ E トシマス. 仮リニ $\beta \geqq A(x) \geqq \alpha > 0$ トスルト

$$\frac{\delta}{\beta} \leqq \frac{\delta}{A(x)} \leqq \frac{\delta}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta} \leqq \frac{1}{A(x)} = \overline{O'P'} \leqq \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{2}{\beta} \leqq \frac{2}{A(x)} = \overline{P'Q'} \leqq \frac{2}{\alpha}$$

トナリマスカラ



$$\begin{cases} \overline{XP'} = \dfrac{1}{\beta}, \\ \overline{YP'} = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Fig. 2.

図ノ如キ影ヲ施シタ領域ヲ G トシマスト $E < G$,

サウスルト, G' 到ルトコロデ $L(x,y;\lambda)$ ハ任意点 (x,y) ニ対シテ, λ ノ正則函

ガウスルト, G'ノ到ル所デ $L(x,y;\lambda)$ ハ任意点(x,y)ニ對シテ, λノ正則函数

ト云フ事ガ云ヘマセウ.

ソコデ $L(x,y;\lambda)$ ノ nth iterated kernel ヲ $L_n(x,y;\lambda)$, reciprocal kernel

ヲ $l(x,y;\mu,\lambda)$ トセバ, formally ニ

$$l(x,y;\mu,\lambda) = -\sum_{h=0}^{+\infty} \mu^h L_{h+1}(x,y;\lambda)$$

シカルニ $L_{h+1}(x,y;\lambda)$ ハ G' デ λノ正則函数デアルコトハ明カデアリマスカラ, G'

ノ一ツノλヲトッテ見ルト

$$(3) \qquad \frac{D'[\mu L]}{D[\mu L]} = -\sum_{h=0}^{+\infty} \mu^h l_{h+1}(\lambda), \quad l_{h+1}(\lambda) = \int_a^b L_{h+1}(x,x;\lambda)\,dx$$

$D[\mu L]$ ハ λヲ fixed セシトキノ Fredholm's determinant ; $D'[\mu L]$ ハ μ デ微

分シタモノ, $D[\mu L]$ ハ λ in G' ノ一ツニ對シテ μノ超越整函数ヲ表ハシマス.

扨テ $L(x,y;\lambda)$ ハ少クトモ $\lambda=0$ ノ近傍デ, 少クトモ一個ノ固有値ヲ有スルト云

フ事ヲ証明シマセウ.

ソレニハ $\lambda=0$ ノ近傍デハ Spur $l_4(\lambda)$ ガ零ナラザルコトヲ云ヘバ十分デスガ

$$l_4(\lambda) = \iiiint L(x,u;\lambda)\,L(u,t;\lambda)\,L(t,v;\lambda)\,L(v,x;\lambda)\,du\,dv\,dt\,dx$$

各函数ハ G' デλノ正則函数デアリマスカラ (2) ヨリ,

$$\begin{aligned} l_4(0) &= \iiiint K(x,u)\,K(u,t)\,K(t,v)\,K(v,x)\,dt\,du\,dv\,dx \\ &= \iint [K_2(x,t)]^2\,dx\,dt \end{aligned}$$

故ニ $l_4(0) \geqq 0$, 若シ $l_4(0) = 0$ トセバ

$$0 = K_2(x,t) = \int K(x,u)\,K(u,t)\,du, \qquad \text{for any } x \text{ and } t$$

従テ　$0=\int[K(x,u)]^2du$　　∴ $K(x,u)\equiv 0$.

コレニ依ツテ適当ナλニ応ジテ $D[\mu L]=0$ ヲ満足スル $\mu(\lambda)$ ガ存在スルコトハ確カデアリマス，シカルニ $D[\mu L]_{|\lambda|=0}=1$ デアルカラ，$\mu(\lambda)$ ガ存在スベキ範囲ハ $\lambda=0$ ヲ中心トセル某ル円域デアルコトガ分リ，コノ円域ヲ C トシマス，又(3)ヨリ必ズ $|\mu(\lambda)|$ ハ有限デナケレバナリマセン，何者 $\frac{D'}{D}$ ＝整函数トナリマスカラ，ソコデ β ヲ十分小ニスレバ，G ヲ C ノ外ニ押シ出シテアツコトガ出来マス，従テ C ハ G' ノ内カラダケデ作ルコトガ出来マス，$(C<G')$. C ヲ十分大ニトツテ差支ヘナイカラ，C ノ周上デ

$$|\lambda|\geqq|\mu(\lambda)|,$$

($\mu(\lambda)$ ハ $D[\mu L]$ ノ整函数デアルコトカラ，ソノ正則性ガ保証サレマス)

ソコデ Rouché ノ定理ニヨツテ C 内デ方程式

$$\lambda=\mu(\lambda)$$

ヲ満ス様ナ一根 λ_0 ガ必ズ存在スルデセウ。

上ノ結果ハ $A(x)\neq 0$ ナルトキモ同様ニ成立シマス。

(9, 28, 受取)